Gestion des saturations en commande des systèmes d'OA

Caroline Kulcsár[1] Henri-François Raynaud[1] Cyril Petit[2]
Jean-Marc Conan[2]

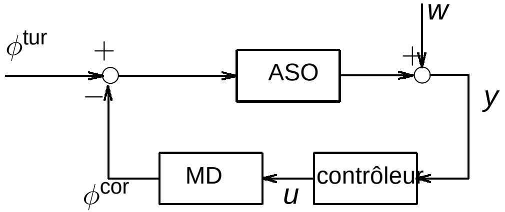
[1]L2TI — Laboratoire de Traitement et Transport de l'Information
Institut Galilée, Université Paris 13, Villetaneuse, France

[2]ONERA — Office National d'Études et Recherches Aérospatiales,
Département d'Optique Théorique et Appliquée, Châtillon, France

Plan de la présentation

1. Commande optimale en OA
2. Les saturations entrent dans la danse
   - Performance *vs.* saturations
   - Commande optimale sous contraintes
   - Calcul de la commande optimale
3. Approches sous-optimales
   - Intégrateur et LQG tronqués (*clipping*)
   - LQG avec pénalisation sur la commande
4. Résultats de simulation
5. Conclusions

Représentation en schéma-bloc — Critère d'optimalité



Modèles

- ASO : Shack Hartmann $y_k = D\phi^{\text{res}}_{k-1} + w_k$
- MD : miroir déformable, $\phi^{\text{cor}}_k = Nu_{k-1}$
- Commande : u constant sur l'intervalle ΔT
- Critère d'optimalité : variance minimale

$$J(u) \triangleq \mathrm{E}\left(\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\|\phi^{\text{res}}_k\|^2\right), \quad \phi^{\text{res}}_k = \phi^{\text{tur}}_k - \phi^{\text{cor}}_k.$$

Contraintes sévères → mauvaises performances

Amélioration des performances

$\Rightarrow$ Gain de rétroaction plus élevé

Contraintes sévères → mauvaises performances

Amélioration des performances

- ⇒ Gain de rétroaction plus élevé
- ⇒ Plus d'actionneurs saturés

Contraintes sévères → mauvaises performances

Amélioration des performances

- ⇒ Gain de rétroaction plus élevé
- ⇒ Plus d'actionneurs saturés
- ⇒ Dégradation des performances

Contraintes sévères → mauvaises performances

Amélioration des performances

- ⇒ Gain de rétroaction plus élevé
- ⇒ Plus d'actionneurs saturés
- ⇒ Dégradation des performances

Options ?

- Technologique : augmenter la course maximale des actionneurs
- Logicielle : limiter la dégradation des performances provoquée par les saturations

Critère et solution

Critère d'optimalité

Minimiser $J(u) = \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{K} \|\phi_{k+1}^{\mathrm{tur}} - Nu_k\|^2 | \mathcal{I}_0\right)$

- sous la contrainte $u_k \in \mathcal{U} = [-u_{\max}, u_{\max}]$
  ou plus généralement $Au \leq b$
- $\mathcal{I}_0 =$ *a priori*

Critère et solution

Critère d'optimalité

Minimiser $J(u) = \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{K} \|\phi_{k+1}^{\mathrm{tur}} - Nu_k\|^2 | \mathcal{I}_0\right)$

- sous la contrainte $u_k \in \mathcal{U} = [-u_{\max}, u_{\max}]$
  ou plus généralement $Au \leq b$
- $\mathcal{I}_0 =$ *a priori*

Solution du problème sous contrainte

- Information complète : $u_k^{\mathrm{det}} = \mathrm{Proj}(\phi_{k+1}^{\mathrm{tur}})$
- Information incomplète : $u_k^{*} = \mathrm{Proj}(\hat{\phi}_{k+1|k}^{\mathrm{tur}})$

Critère et solution

Critère d'optimalité

Minimiser $J(u) = \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{K} \|\phi_{k+1}^{\mathrm{tur}} - N u_k\|^2 | \mathcal{I}_0\right)$

- sous la contrainte $u_k \in \mathcal{U} = [-u_{\max}, u_{\max}]$
  ou plus généralement $Au \leq b$
- $\mathcal{I}_0 = a\ priori$

Solution du problème sous contrainte

- Information complète : $u_k^{\mathrm{det}} = \mathrm{Proj}(\phi_{k+1}^{\mathrm{tur}})$
- Information incomplète : $u_k^{*} = \mathrm{Proj}(\hat{\phi}_{k+1|k}^{\mathrm{tur}})$

$\Rightarrow$ séparation et équivalence à la certitude

$\hat{\phi}_{k+1|k}^{\mathrm{tur}}$ = espérance conditionnelle = prédiction optimale de $\phi_{k+1}^{\mathrm{tur}}$

Filtre de Kalman et projection sous contraintes

Prédiction optimale : filtre de Kalman

- Prédiction $\hat{\phi}^{\text{tur}}_{k+1|k}$ obtenue par filtrage de Kalman
- Modèle stochastique de phase turbulente :
  $\phi^{\text{tur}}_{k+1} = A^{\text{tur}} \phi^{\text{tur}}_{k} + v_k$
- L'estimation ne dépend pas de u

Filtre de Kalman et projection sous contraintes

Prédiction optimale : filtre de Kalman

- Prédiction $\hat{\phi}^{\text{tur}}_{k+1|k}$ obtenue par filtrage de Kalman
- Modèle stochastique de phase turbulente : $\phi^{\text{tur}}_{k+1} = A^{\text{tur}}\phi^{\text{tur}}_{k} + v_k$
- L'estimation ne dépend pas de u

Commande optimale

- Projection orthogonale sur l'ensemble $\mathcal{U}$ des commandes admissibles (problème convexe)
- Optimisation : programmation quadratique (méthode des contraintes actives ou *active sets*)

Mieux vaut connaître *a priori* le niveau de saturation

Commande intégrale tronquée

- $u_k^{\text{int}} = sat(u_{k-1}^{\text{int}}) + gM_{\text{com}} y_k$,
- M_{com} : pseudo-inverse de la matrice d'interaction DN
- g : gain scalaire
- $sat(u_k^{\text{int}})$ est appliqué au système

Mieux vaut connaître *a priori* le niveau de saturation

Commande intégrale tronquée

- $u_k^{\text{int}} = sat(u_{k-1}^{\text{int}}) + gM_{\text{com}}y_k$,
- M_{com} : pseudo-inverse de la matrice d'interaction DN
- g : gain scalaire
- $sat(u_k^{\text{int}})$ est appliqué au système

LQG tronqué

- $u_k^{\text{lqg}} = (N^{\text{t}}N)^{-1}N^{\text{t}}\hat{\phi}_{k+1|k}^{\text{tur}}$
- $sat(u_k^{\text{lqg}})$ appliqué au système et envoyé au filtre de Kalman
- La prédiction de la phase reste optimale

Une pénalisation sur la commande améliore les performances

Critère pénalisé

- critère modifié $J_k^{\mathrm{reg}}(u_k) = \|\hat{\phi}^{\mathrm{tur}}_{k+1|k} - N u_k\|^2 + u_k^{\mathrm{t}} R u_k$
- matrice de pénalisation $R = \frac{\mu_0}{u_{\max}^2} I$

Une pénalisation sur la commande améliore les performances

Critère pénalisé

- critère modifié $J_k^{\text{reg}}(u_k) = \|\hat{\phi}^{\text{tur}}_{k+1|k} - Nu_k\|^2 + u_k^t R u_k$
- matrice de pénalisation $R = \frac{\mu_0}{u_{\text{max}}^2} I$

Choix du paramètre de régularisation

- Amplitude $|u| \leq u_{\text{max}} \Leftrightarrow$ énergie $u^2 \leq u_{\text{max}}^2$

Une pénalisation sur la commande améliore les performances

Critère pénalisé

- critère modifié $J_k^{\text{reg}}(u_k) = \|\hat{\phi}^{\text{tur}}_{k+1|k} - Nu_k\|^2 + u_k^t R u_k$
- matrice de pénalisation $R = \frac{\mu_0}{u_{\max}^2} I$

Choix du paramètre de régularisation

- Amplitude $|u| \leq u_{\max} \Leftrightarrow$ énergie $u^2 \leq u_{\max}^2$
- Plus la contrainte est sévère ($u_{\max}^2$ petit), plus il faut pénaliser u^2
- Régularisation inversement proportionnelle à $u_{\max}^2$: $R = \frac{\mu_0}{u_{\max}^2} I$

Une pénalisation sur la commande améliore les performances

Critère pénalisé

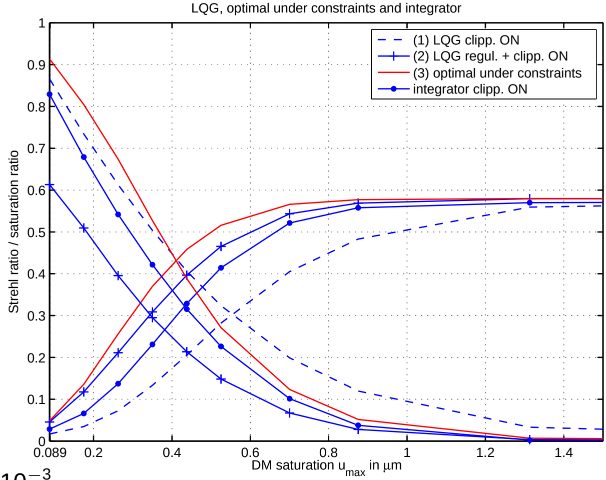
- critère modifié $J_k^{\text{reg}}(u_k) = \|\hat{\phi}^{\text{tur}}_{k+1|k} - Nu_k\|^2 + u_k^t R u_k$
- matrice de pénalisation $R = \frac{\mu_0}{u_{\text{max}}^2} I$

Choix du paramètre de régularisation

- Amplitude $|u| \leq u_{\text{max}} \Leftrightarrow$ énergie $u^2 \leq u_{\text{max}}^2$
- Plus la contrainte est sévère (u_{max}^2 petit), plus il faut pénaliser u^2
- Régularisation inversement proportionnelle à u_{max}^2 : $R = \frac{\mu_0}{u_{\text{max}}^2} I$

Compromis entre limitation de l'énergie : $\mu_0 \nearrow$,
et performances : $\mu_0 \searrow$

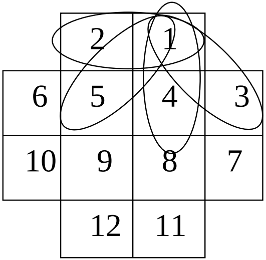
Pénalisation sur l'amplitude (ou sur la puissance totale dissipée)



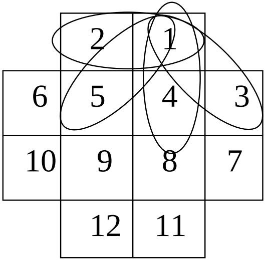
$\mu_0 = 3.9\,10^{-3}$

En moyenne sans saturation : 15.4% des amplitudes > 0.79 μm.

Pénalisation sur la course inter-actionneurs (inter-stroke)

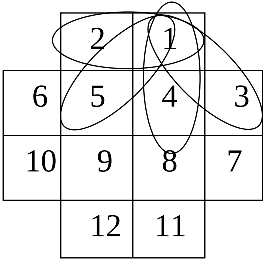


Pénalisation sur la course inter-actionneurs (inter-stroke)



$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & -1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \\ & & \dots & & & \end{pmatrix}$$

Pénalisation sur la course inter-actionneurs (inter-stroke)

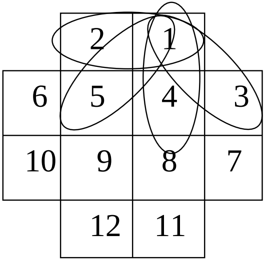


$$G = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & -1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \\ & & \ldots & & & \end{array} \right)$$

$\Delta u = Gu$ d'où la pénalisation en $\|\Delta u\|^2$: $\mu_1 u^t G^t G u$

Contrainte : $|\Delta u| \leq c$

Pénalisation sur la course inter-actionneurs (inter-stroke)

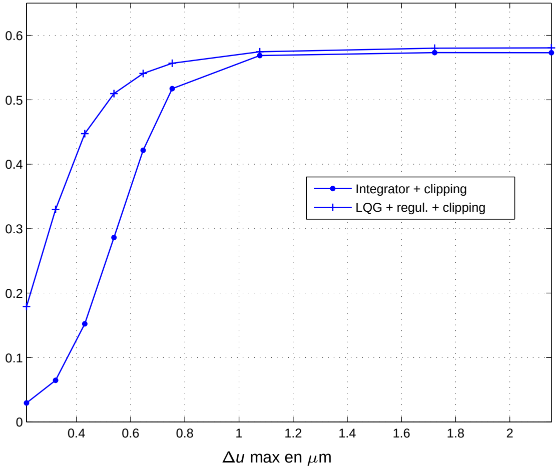


$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & -1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \\ & & \ldots & & & \end{pmatrix}$$

$\Delta u = Gu$ d'où la pénalisation en $\|\Delta u\|^2$: $\mu_1 u^t G^t G u$
Contrainte : $|\Delta u| \leq c$

Problème : si l'on impose $\Delta u = \delta_0$, comment calculer le u_0 correspondant ?

Performances en fonction de la course inter-actionneurs max autorisée



Conclusions

- Mauvaise robustesse en performance de la commande LQG tronquée en présence de contraintes en saturations sévères
- La commande LQG pénalisée donne de bien meilleurs résultats
- Pas d'augmentation de complexité par rapport à du LQG non pénalisé

Conclusions

- Mauvaise robustesse en performance de la commande LQG tronquée en présence de contraintes en saturations sévères
- La commande LQG pénalisée donne de bien meilleurs résultats
- Pas d'augmentation de complexité par rapport à du LQG non pénalisé
- Prendre en compte la puissance totale dissipée est identique à une contrainte d'amplitude

Conclusions

- Mauvaise robustesse en performance de la commande LQG tronquée en présence de contraintes en saturations sévères
- La commande LQG pénalisée donne de bien meilleurs résultats
- Pas d'augmentation de complexité par rapport à du LQG non pénalisé
- Prendre en compte la puissance totale dissipée est identique à une contrainte d'amplitude
- Pour limiter la course inter-actionneurs, la pénalisation + troncature de la commande donne de bons résultats

Conclusions

- Mauvaise robustesse en performance de la commande LQG tronquée en présence de contraintes en saturations sévères
- La commande LQG pénalisée donne de bien meilleurs résultats
- Pas d'augmentation de complexité par rapport à du LQG non pénalisé
- Prendre en compte la puissance totale dissipée est identique à une contrainte d'amplitude
- Pour limiter la course inter-actionneurs, la pénalisation + troncature de la commande donne de bons résultats
- Également possible : prise en compte d'une contrainte de courbure